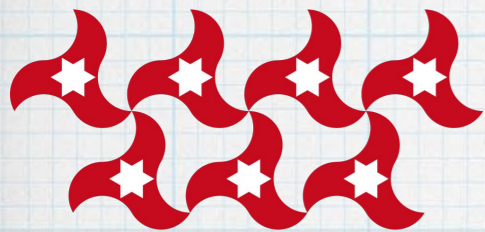


**ESTALMAT**



Comunidad de Madrid



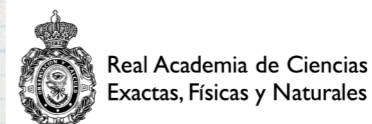
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

# En las distancias cortas es donde la topología se la juega

Angélica Benito y Ana Granados

XIII Seminario de ESTALMAT

Abril 2021



Plan iniciativa de la FUNDACIÓN REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE ESPAÑA

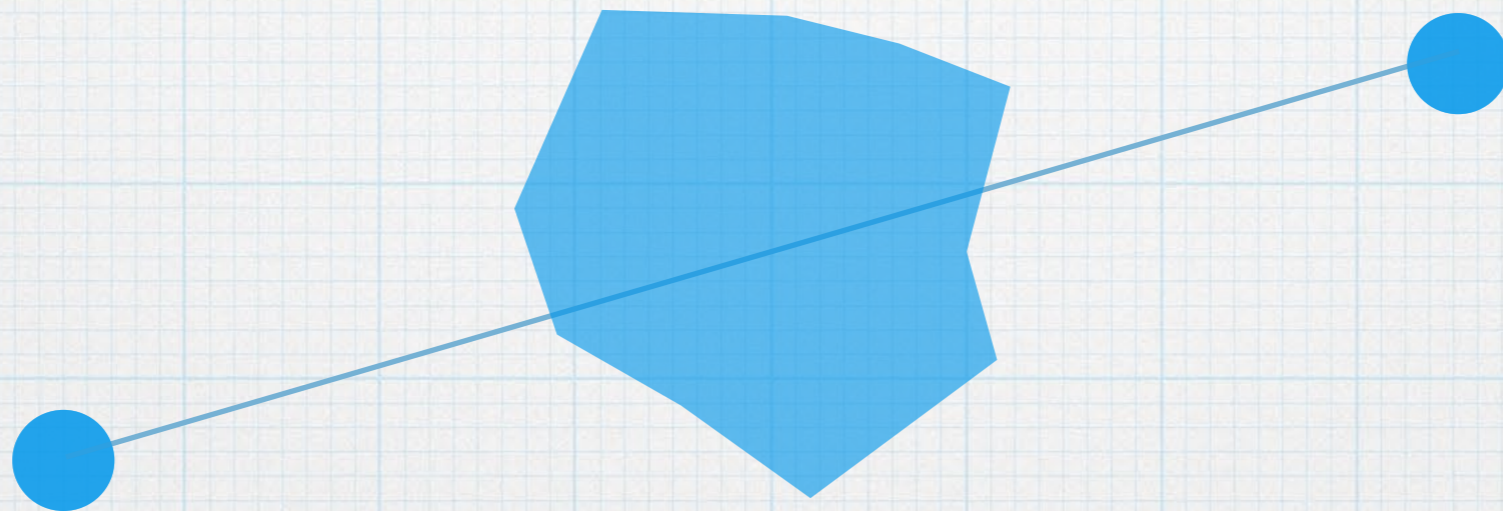


# En las distancias cortas...

una sesión de finales de segundo (con toques de una de jubilados)

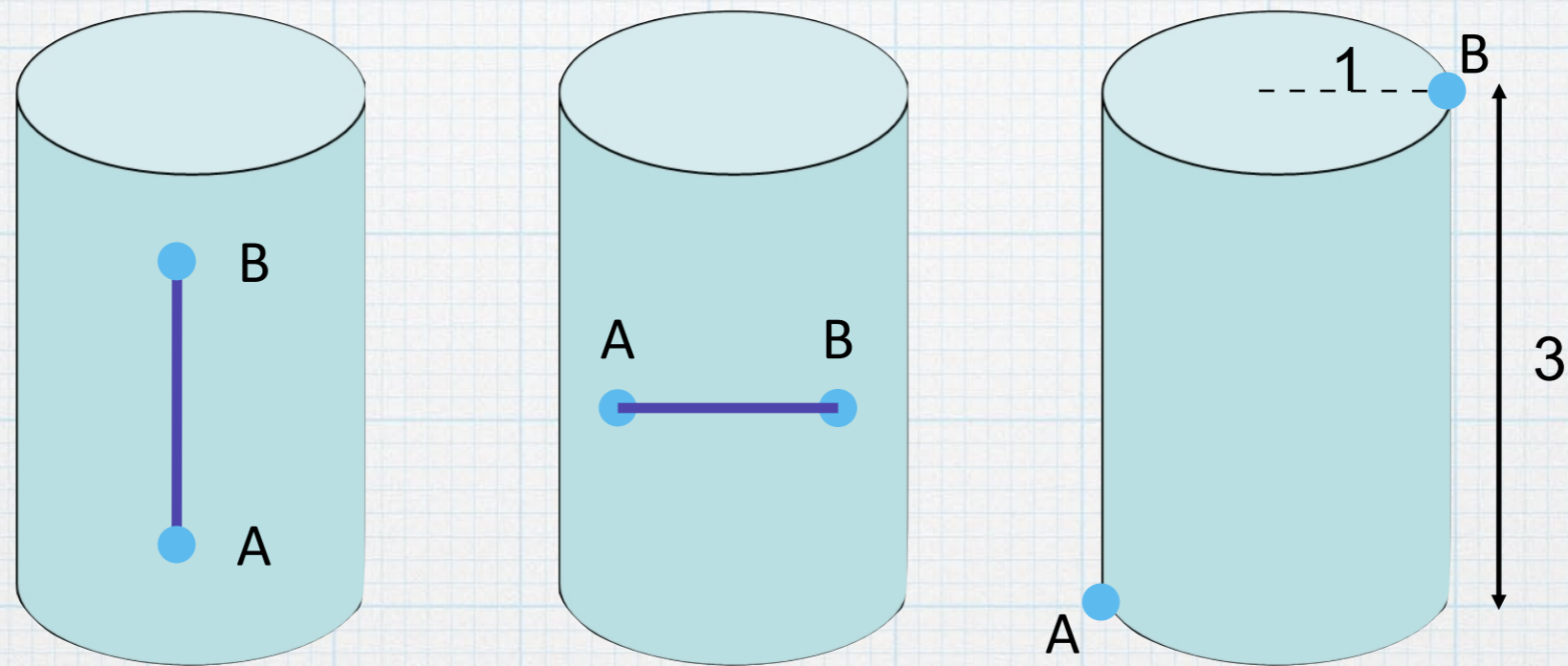


¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos?



# ¿Qué es una recta (sin obstáculos)?

Es el camino **más corto** entre dos puntos que no tienen obstáculos entre sí.



Es el camino más corto entre dos puntos que no tienen obstáculos entre sí, pero **sin salirse de la superficie**.



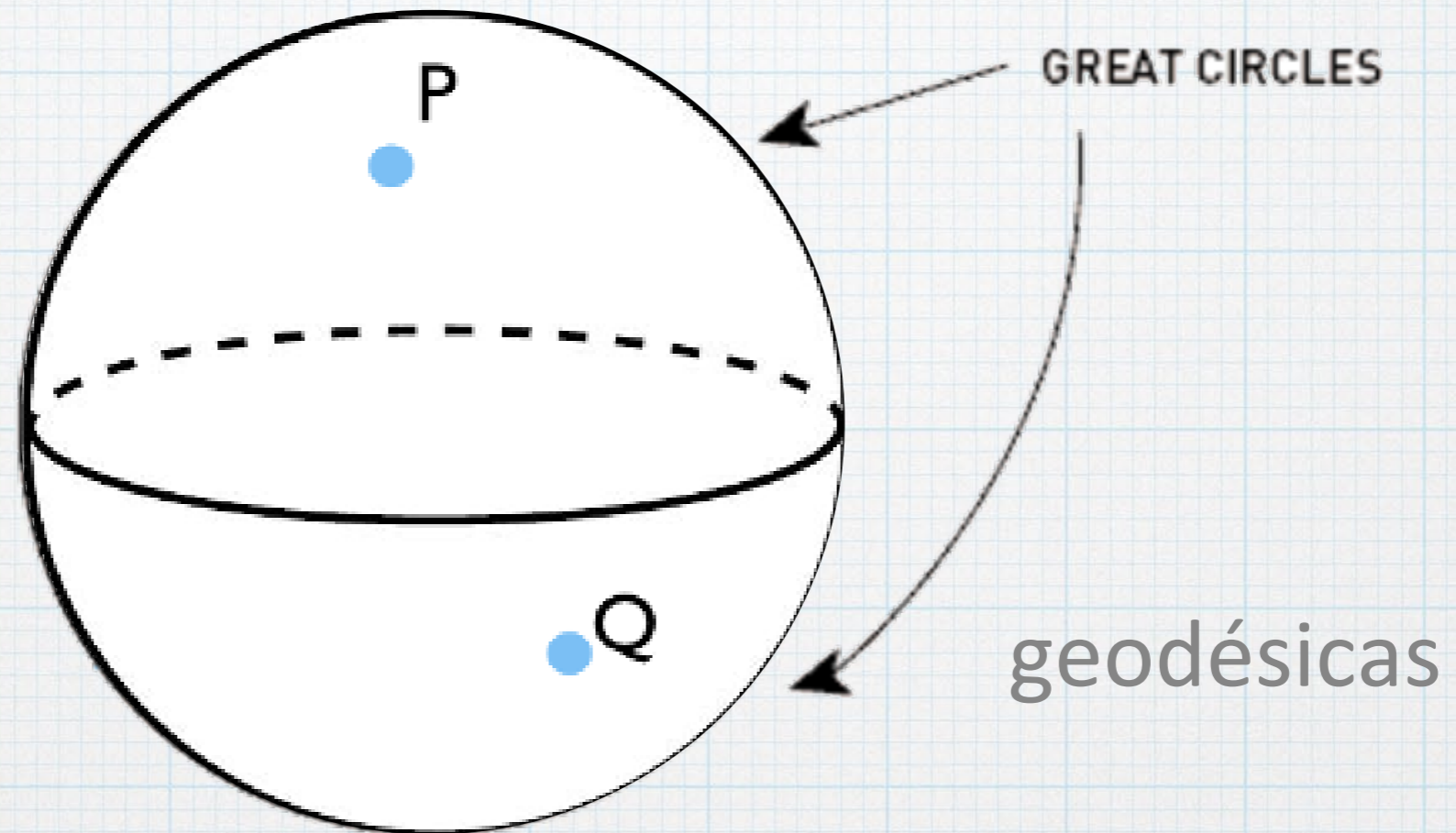
# Pero... ¿siempre es única?



James Robbins, 2002



# Y sin obstáculos, ¿siempre es única?

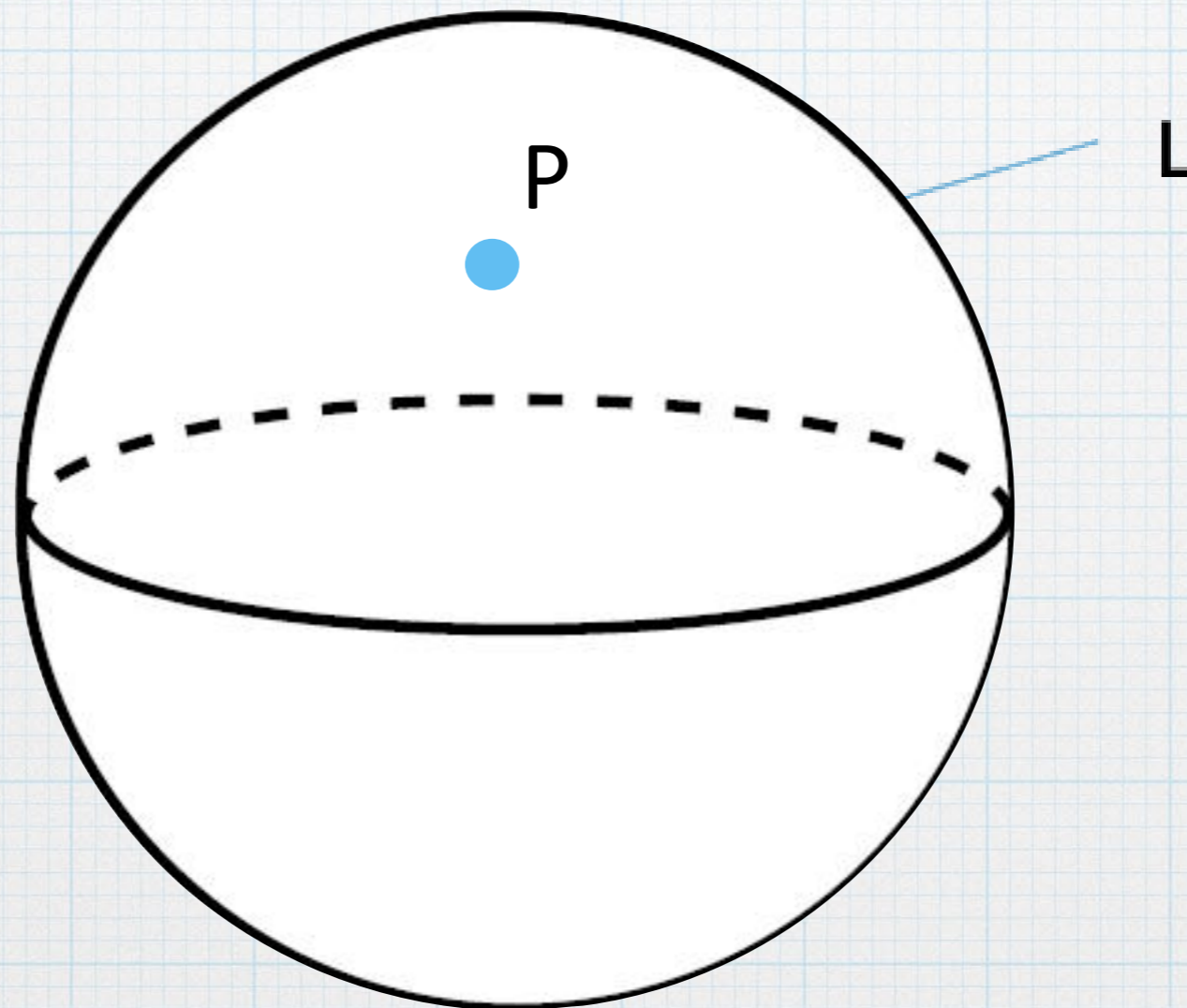


Las rectas o geodésicas son los caminos “de menor energía” entre dos puntos, sin salirse de la superficie.



# 5º Postulado de Euclides

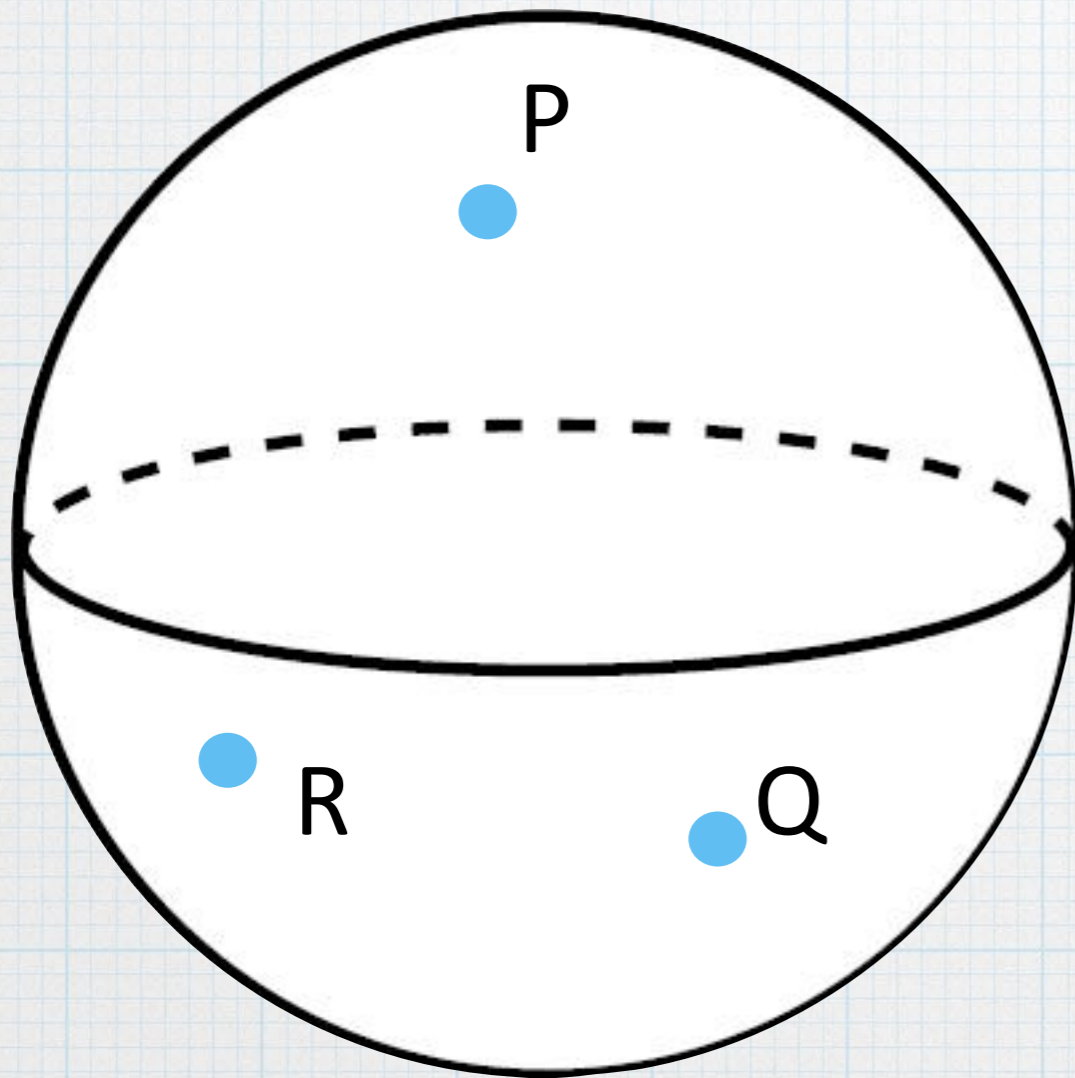
Dada una línea recta  $L$  y un punto  $P$  (como en la figura), ¿cuántas rectas paralelas a  $L$  pasan por  $P$ ?



# Triángulos en una esfera

¿Puedes construir los siguientes triángulos en una esfera?

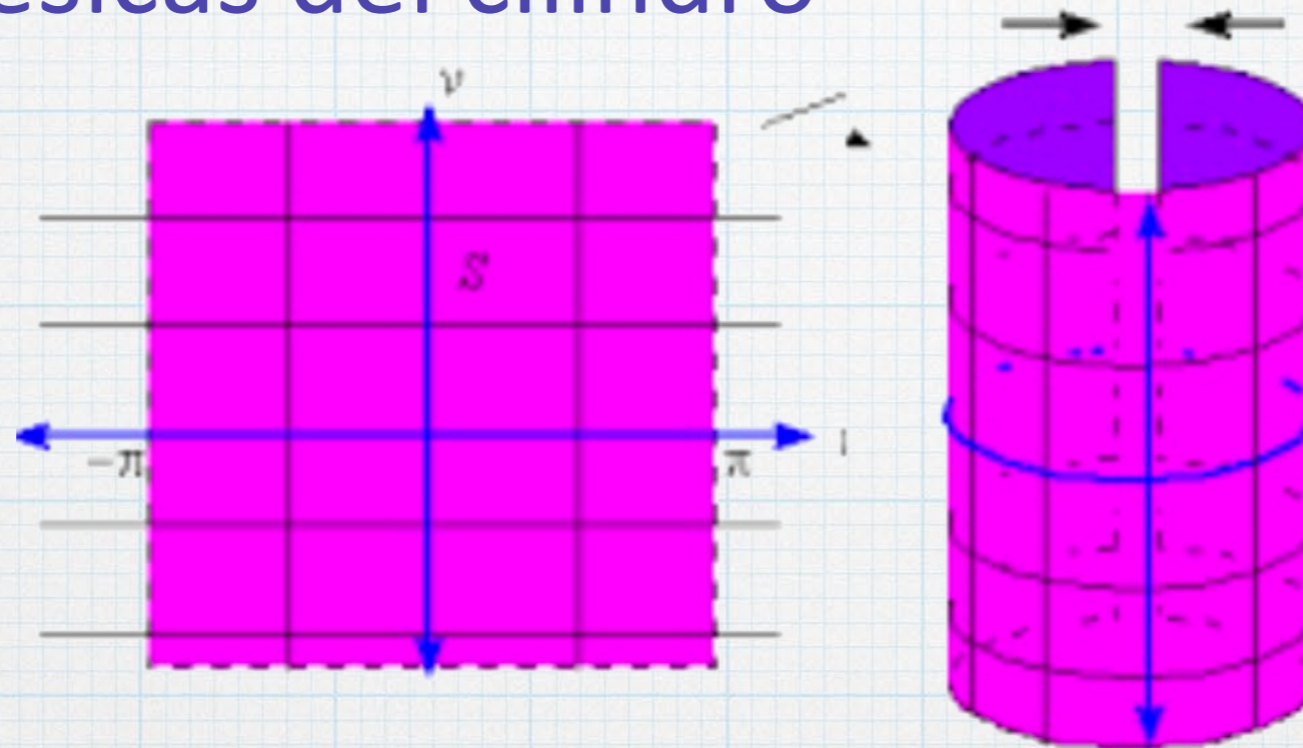
- \* Con tres ángulos de  $90^\circ$ .
- \* Dos ángulos de  $90^\circ$  y uno de  $30^\circ$ .
- \* Dos ángulos de  $90^\circ$  y uno de  $120^\circ$ .
- \* Dos ángulos de  $90^\circ$  y uno de  $180^\circ$ .
- \* La suma de los ángulos es  $180^\circ$ .





# Curvaturas en superficies: curvatura “desde dentro” vs curvatura “desde fuera”

## Las geodésicas del cilindro

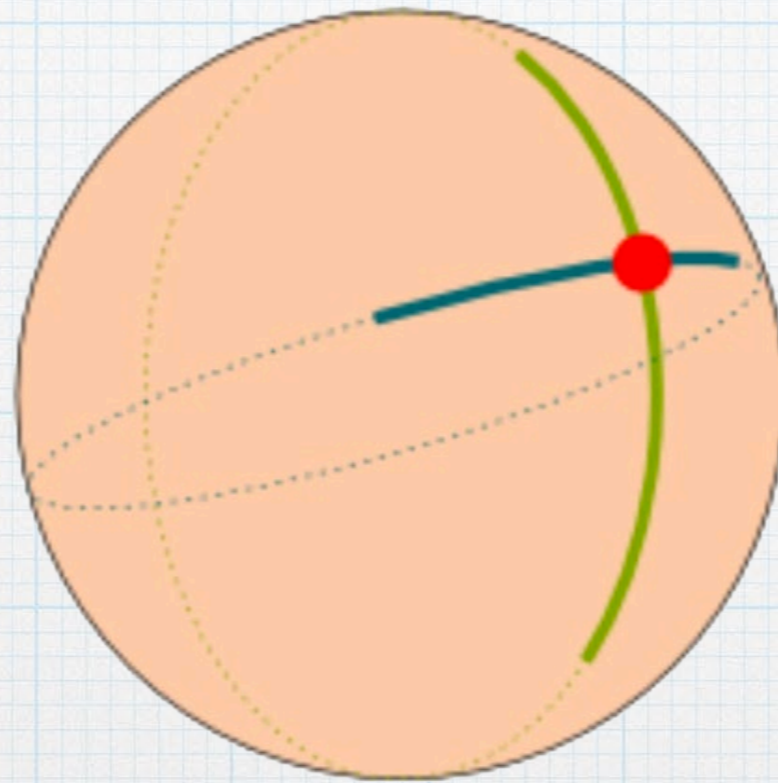


Para los habitantes del cilindro estas geodésicas son iguales, pero para nosotros unas están curvadas y las otras no. ¿Cuál es la más curvada y la menos?



# Curvaturas en la esfera: curvatura “desde dentro” vs curvatura “desde fuera”

## Las geodésicas de la esfera



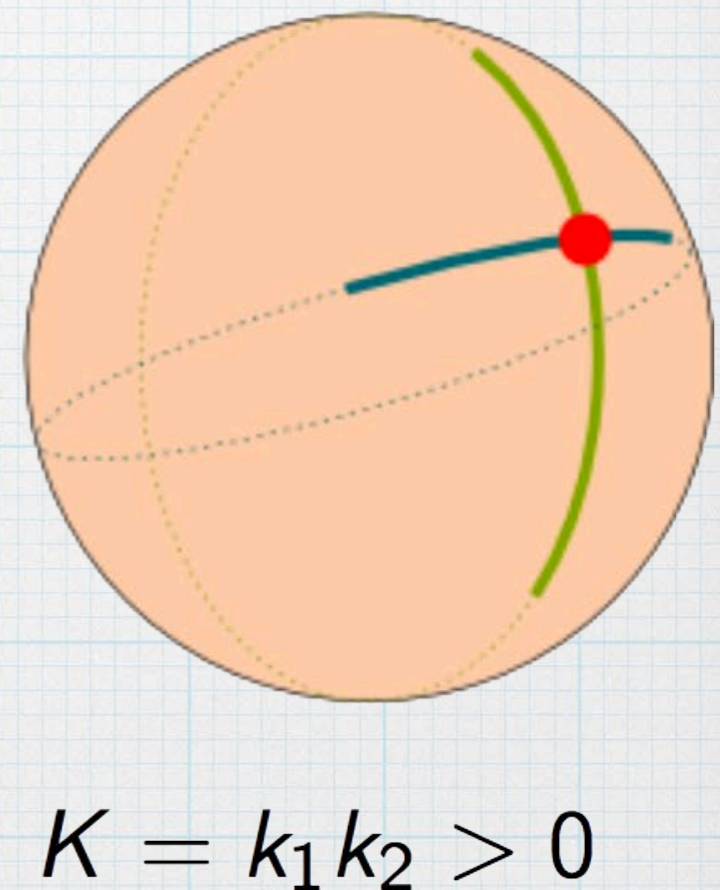
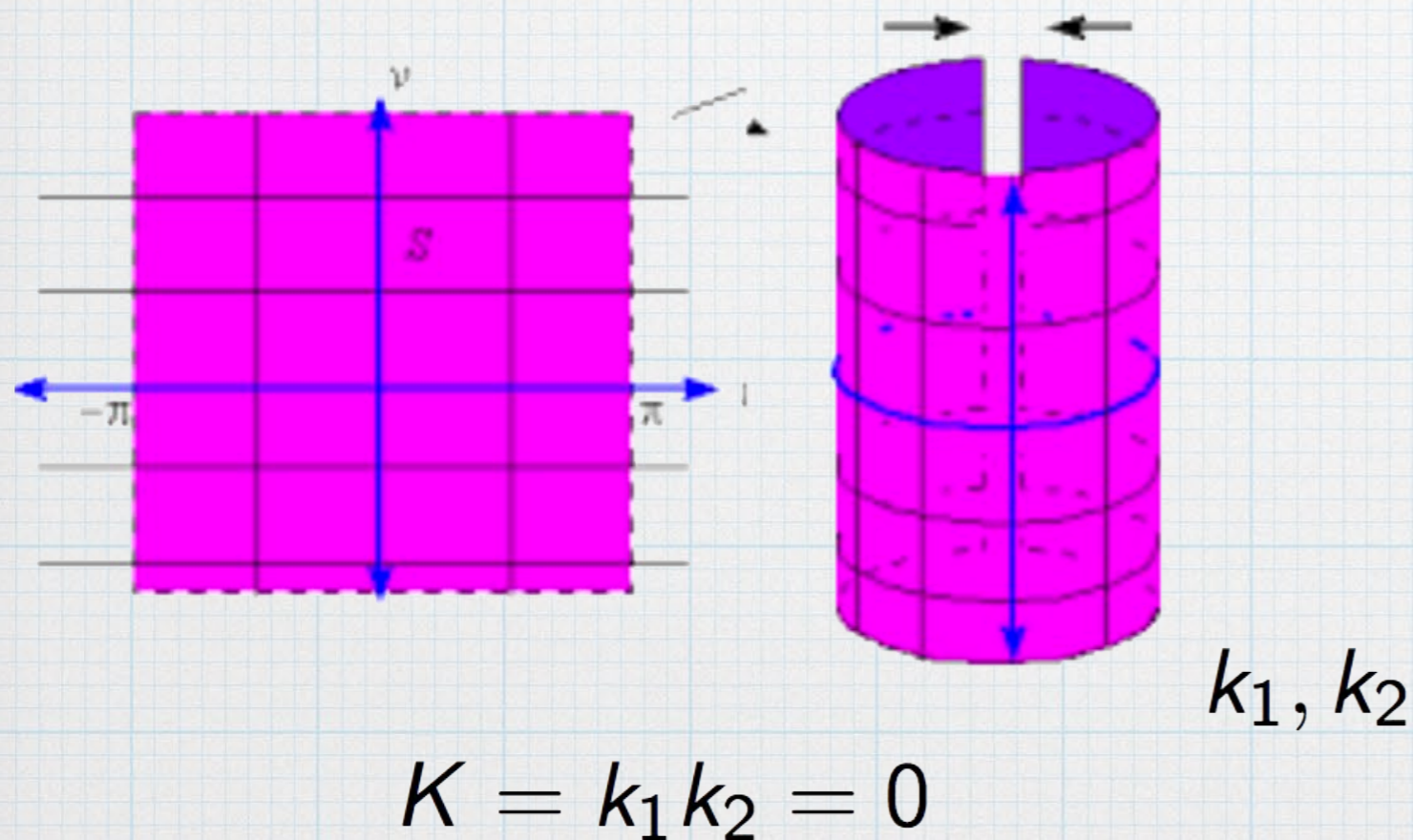
¡Todas las geodésicas están curvadas para los habitantes del mundo “exterior”!



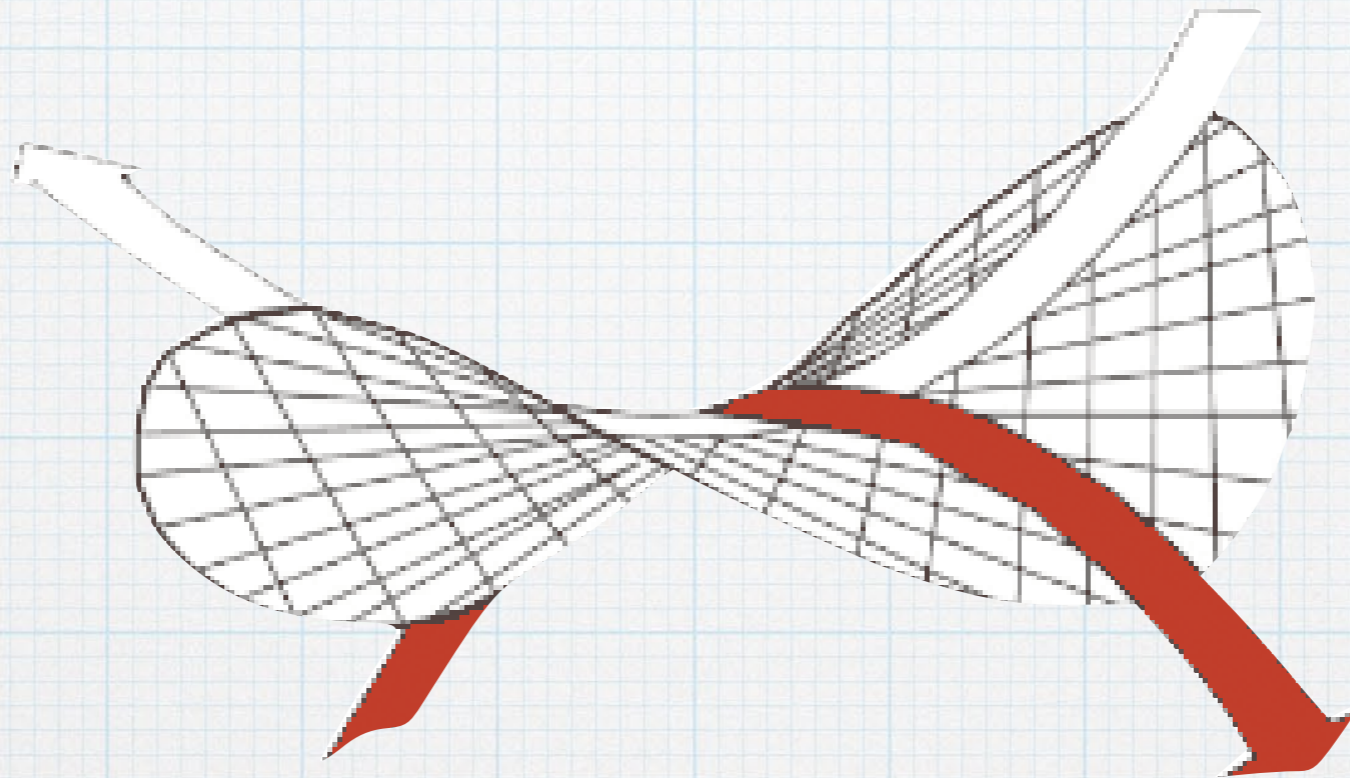
# Curvaturas principales y de Gauss

Curvaturas principales: la más curvada y la menos curvada (con signo). Se llaman  $k_1$  y  $k_2$ .

Curvatura de Gauss: el producto de las curvaturas.



# Curvatura de Gauss negativa



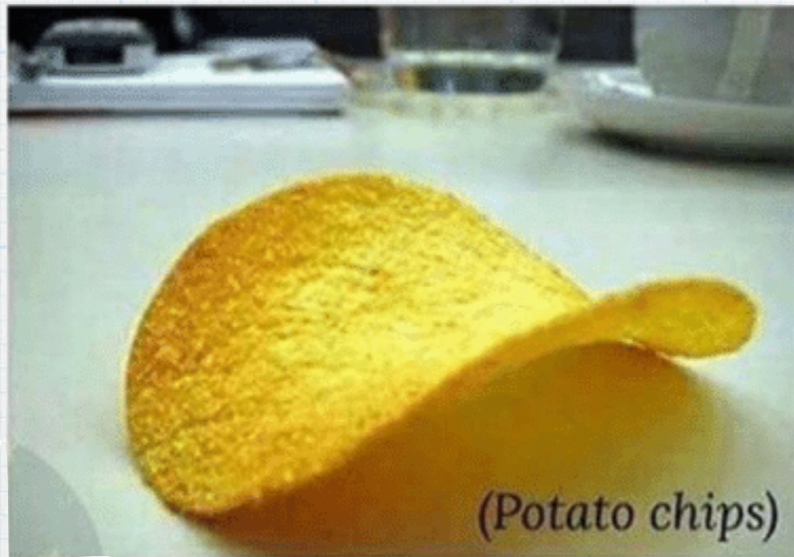
$$K < 0$$

Silla de montar o paraboloides hiperbólico



# Curvatura de Gauss negativa

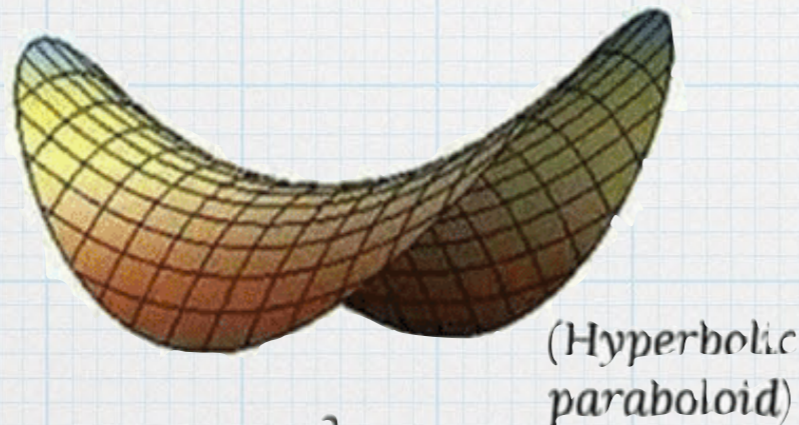
What others see...



Silla de montar  
paraboloide hiperbólico

Pringles no patrocina esta charla

What I see...



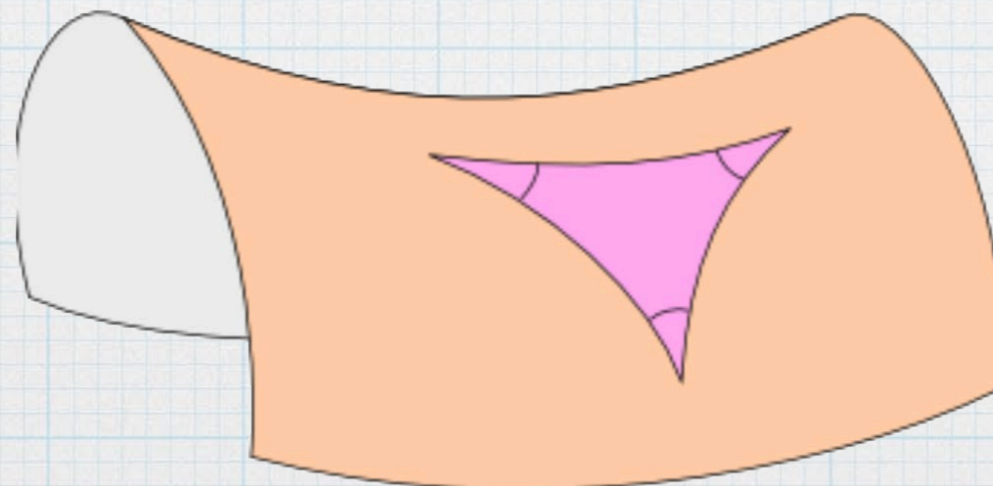
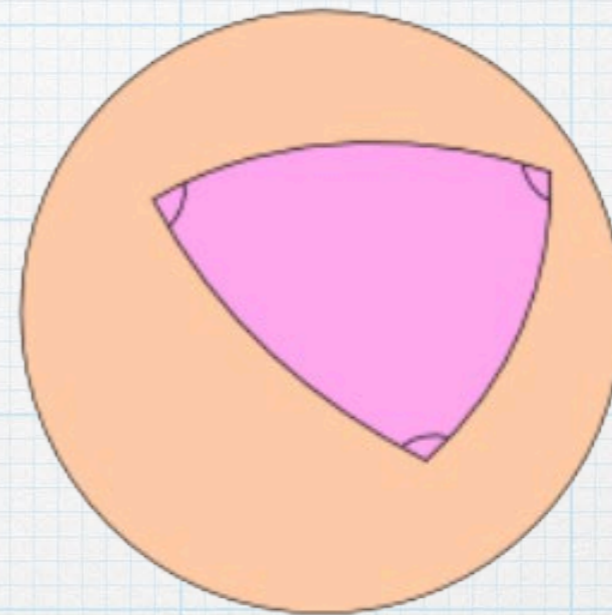
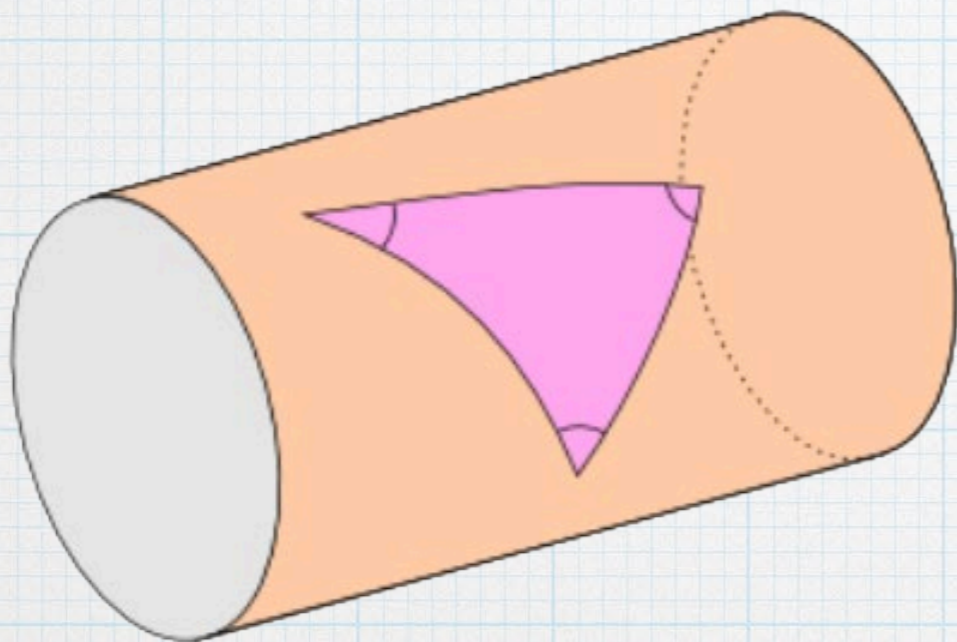
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

I don't even know what to say



# Triángulos

¿Cómo son los triángulos en el cilindro, la esfera y la pringle?



# Gauss-Bonnet

$$\int_T K dA = \sum_i (\alpha_i) - \pi$$

Para curvas

mos!

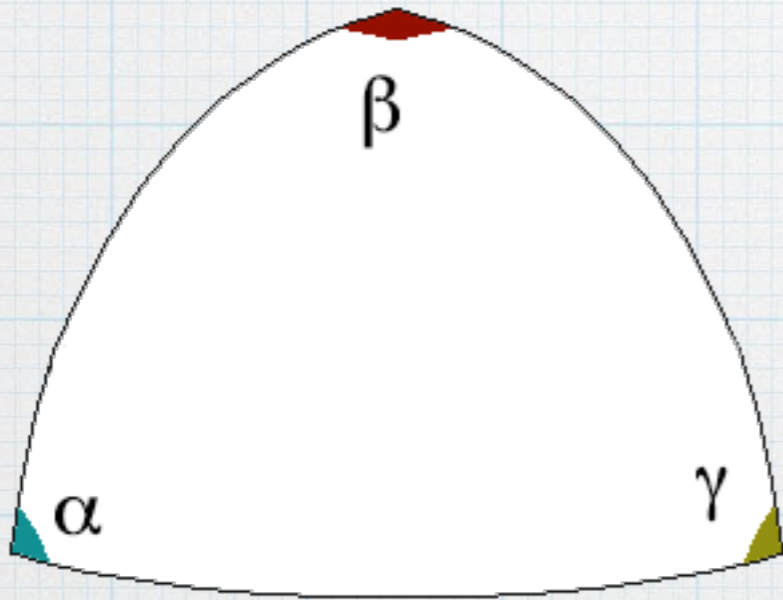
Curv. de Gauss

interiores -  $\pi$



# Gauss-Bonnet

$$\int_T K dA = \sum_i (\alpha_i) - \pi$$



$$K \cdot A(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$





# Falta de homogeneidad



Camino más corto entre ZARA y fnac

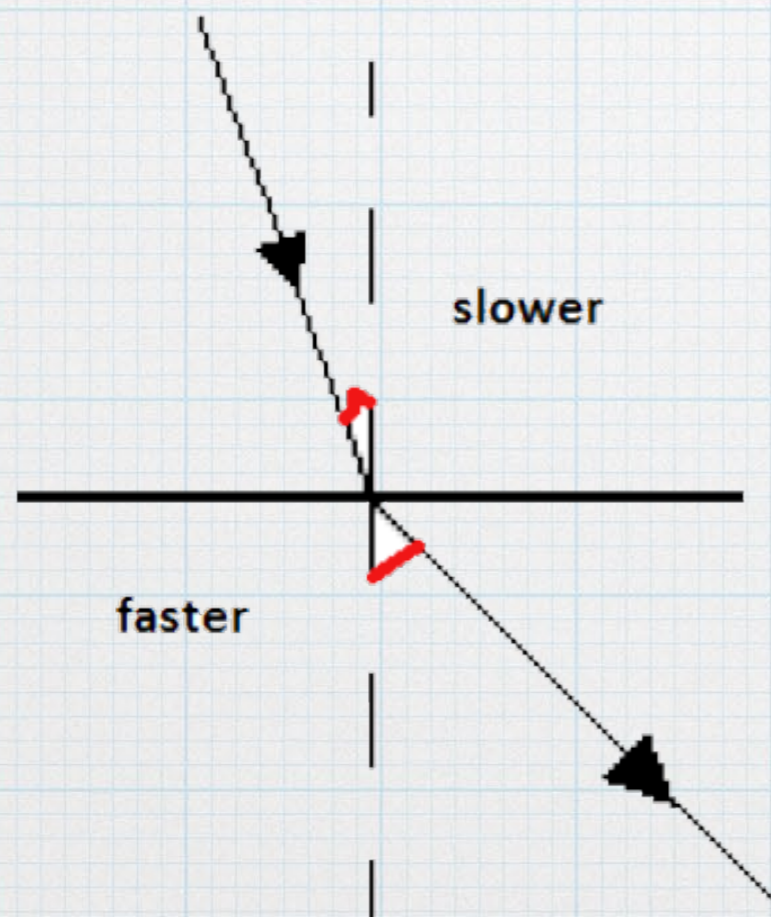
¿Y si vamos mi madre y yo?



# Falta de homogeneidad

Línea recta: la curva que minimiza el **tiempo** a velocidad constante en cada tramo.

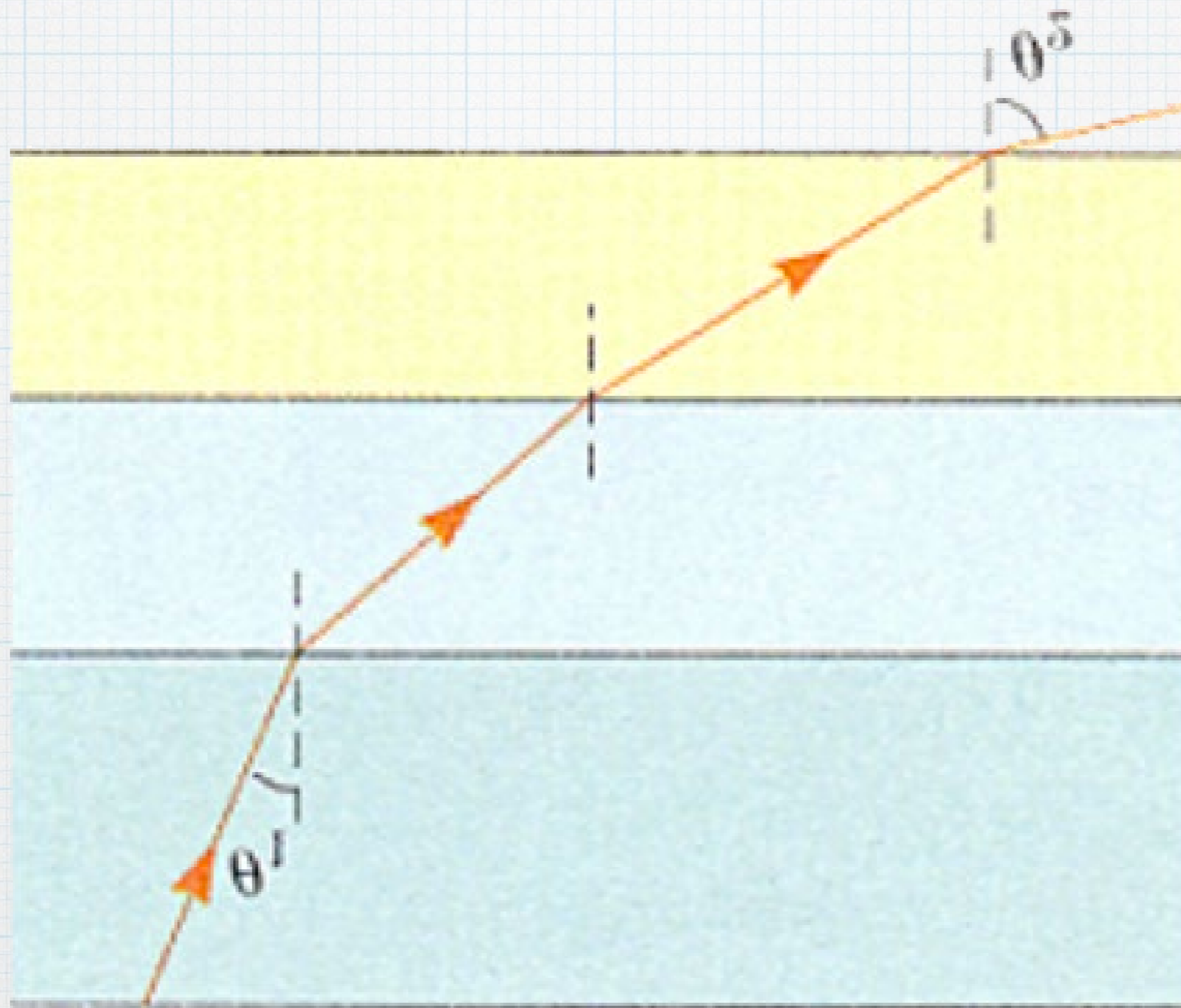
El problema del ahogado:



¿Cómo minimizar el tiempo?

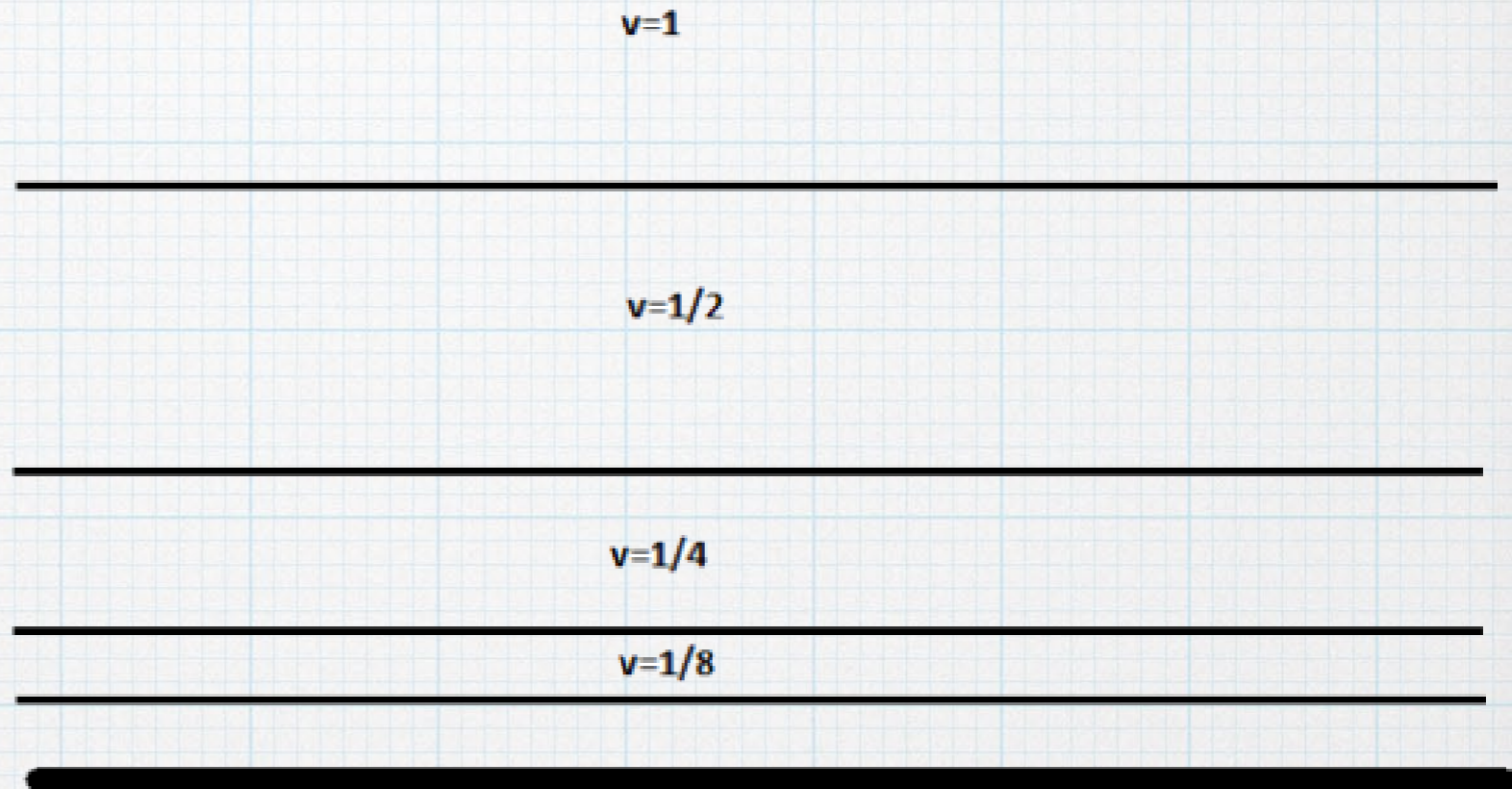
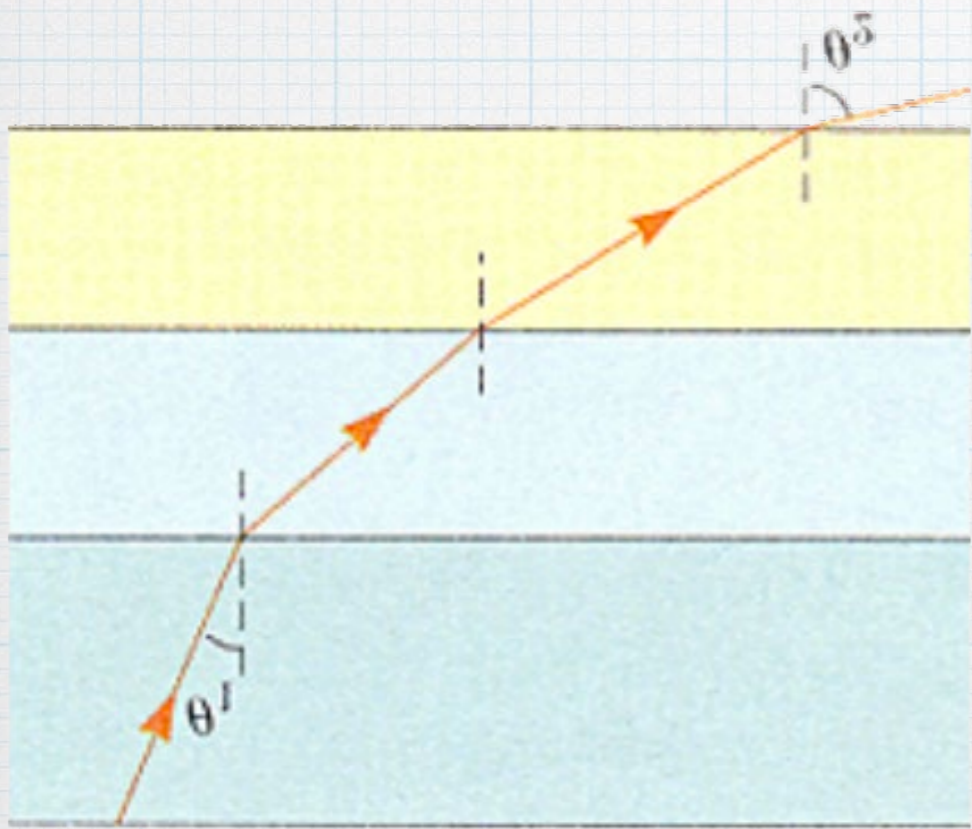
$$T(\gamma) = \frac{|AC|}{v_1} + \frac{|CB|}{v_2}$$





Repitiendo....





La velocidad en un punto  $(x,y)$  es  $y$ .  
En el mismo tiempo recorreremos cada vez menos distancia

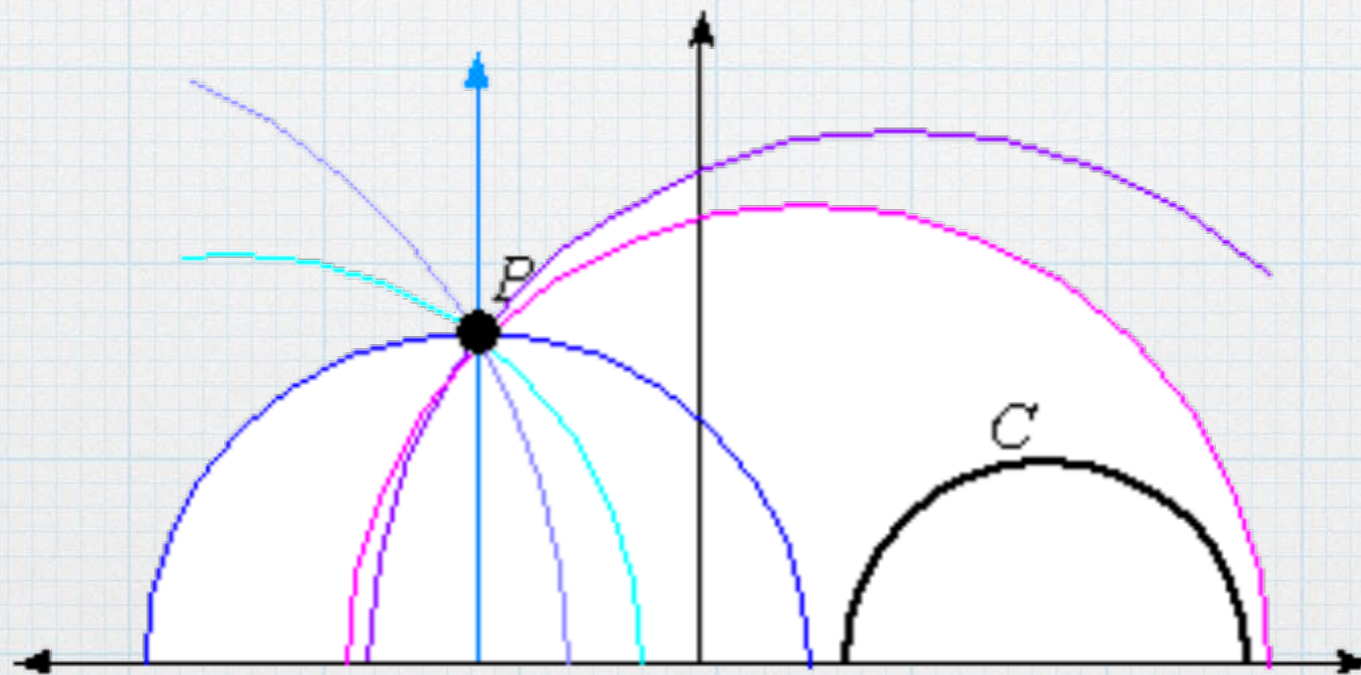


¿Cuál es la geodésica entre dos puntos que están en la misma vertical?

¿Y si están en la misma horizontal?

¿Cuántas rectas paralelas a una dada pasan por un punto exterior a ésta?

¿Cómo son los triángulos?

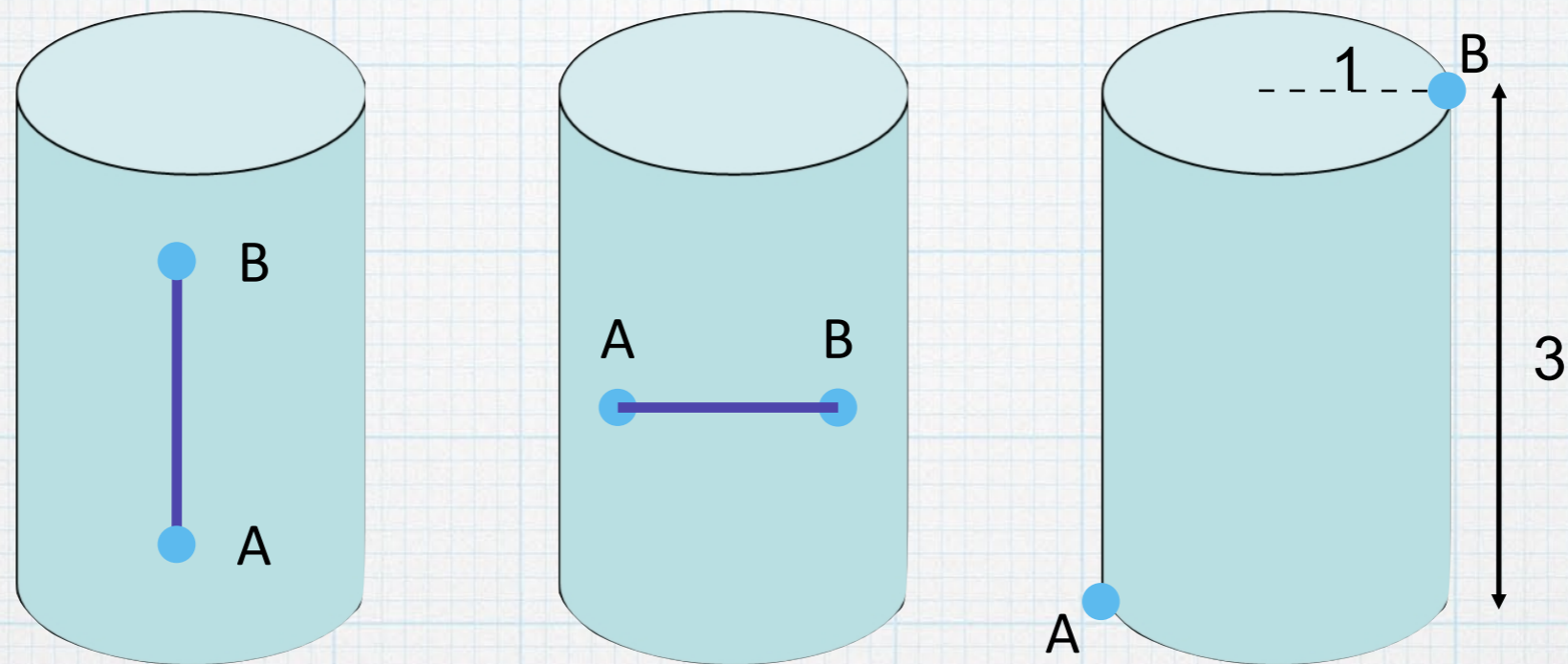


...es donde la  
topología...

una sesión de primero o de segundo



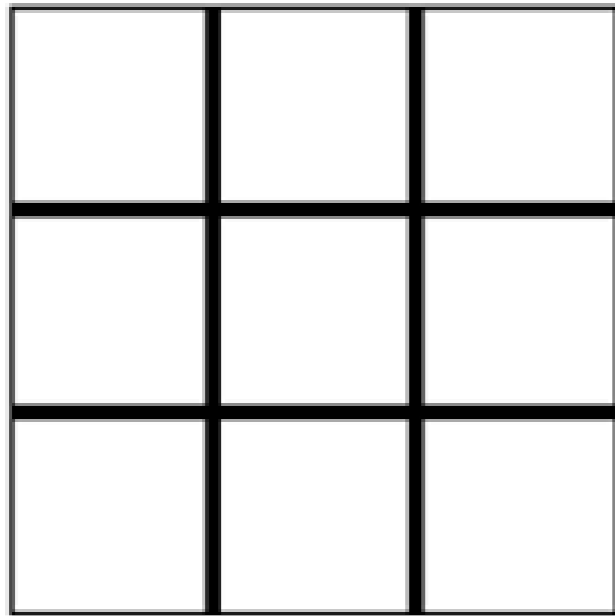
# ...se la juega



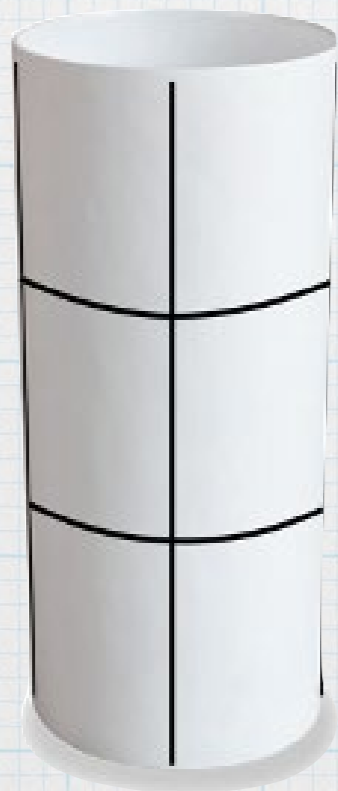
Acabamos una primera sesión de caminos minimales calculando distancias cortas en el cilindro gracias a su desarrollo plano



# ...se la juega



En el juego de las tres en raya, ¿cuántas formas de empezar distintas tiene el primer jugador? ¿cuántas respuestas tiene el segundo? ¿existe alguna estrategia ganadora?

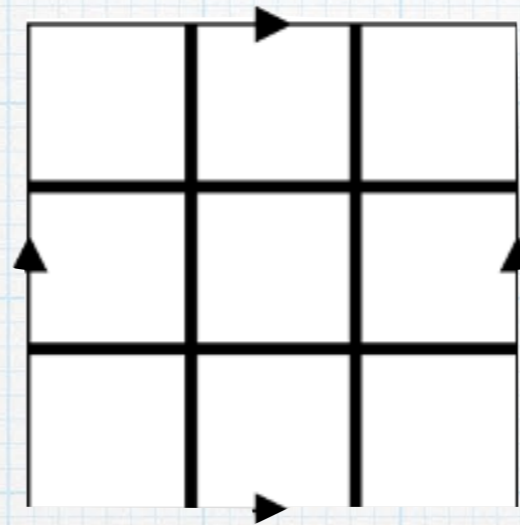
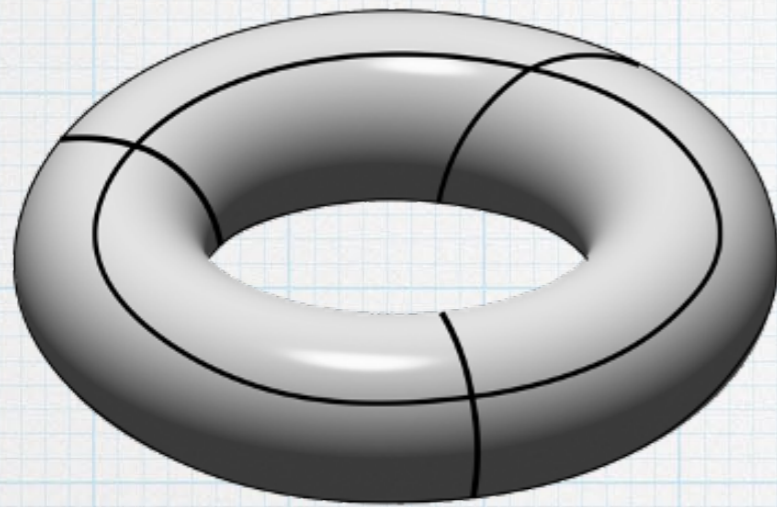


En nuestro “mundo cilíndrico” (después de doblar el papel), ¿cuántos inicios distintos tenemos? ¿Cuántas posiciones centrales hay? ¿existe una estrategia ganadora?





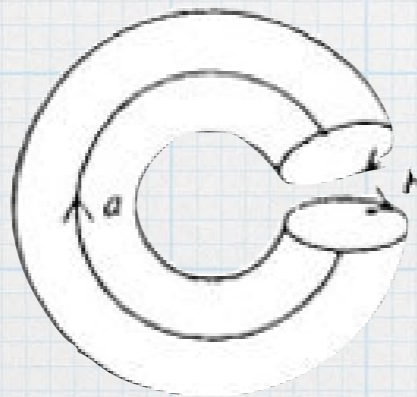
# ...se la juega



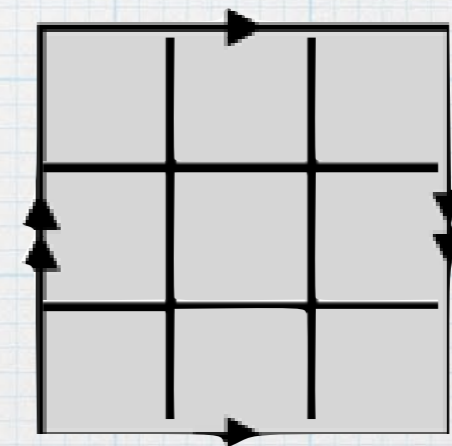
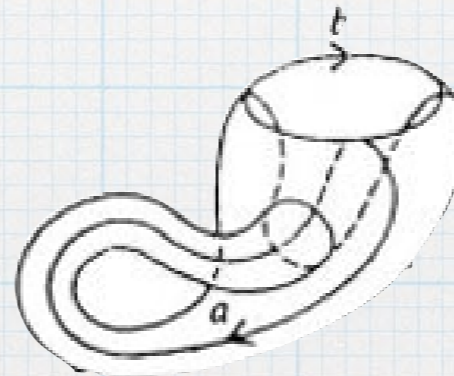
¿Y en el toro?



Quitar



Quitar  
y pegar



¿Y en la botella de Klein?





*That's all Folks!*

*¡Gracias!*

